

Les relativités
De Galilée à Einstein
et
Pourquoi $E = mc^2$

Support « diapo » d'un mémoire de Michel Grand 2012

Préambule

2

La chose « relative » est celle qui n'a d'objectivité que si on la compare à une autre à titre de référence. (*dictionnaire*)

Cet exposé, va nous inciter à mieux mesurer la réalité de notre environnement en identifiant neufs relativités remarquables allant de la relativité des grands nombres à la « la Relativité Restreinte » ; et en omettant volontairement la dixième, « la Relativité Générale » dont la vulgarisation est beaucoup plus complexe.

Sommaire:

3

- Première relativité: La relativité des grands nombres
- Deuxième relativité: La machine à remonter le temps
- Troisième relativité: La trahison du bon sens
- Quatrième relativité: L'illusion de l'immobilité
- Cinquième relativité: Le calendrier cosmique
- Sixième relativité: La relativité galiléenne
- Septième relativité: La non-relativité de la vitesse de la lumière
- Huitième relativité: La flexibilité du temps et de l'espace
- Neuvième relativité: La relativité restreinte

**Comment, devant ce majestueux et intrigant spectacle, ne pas se poser la question :
Que représente notre monde, longtemps considéré
comme le centre de tout, dans cette immensité ?**



1. La relativité des grands nombres

5

Estimation (2011) de la matière baryonique (visible)

30 mille milliards de milliards d'étoiles ($3 \cdot 10^{22}$)

Dont 200 milliards dans notre galaxie (la voie lactée)

10 millions de « superamas »

25 milliards d'amas galactiques

350 milliards de grandes galaxies

7000 milliards de galaxies naines ($7 \cdot 10^{12}$)

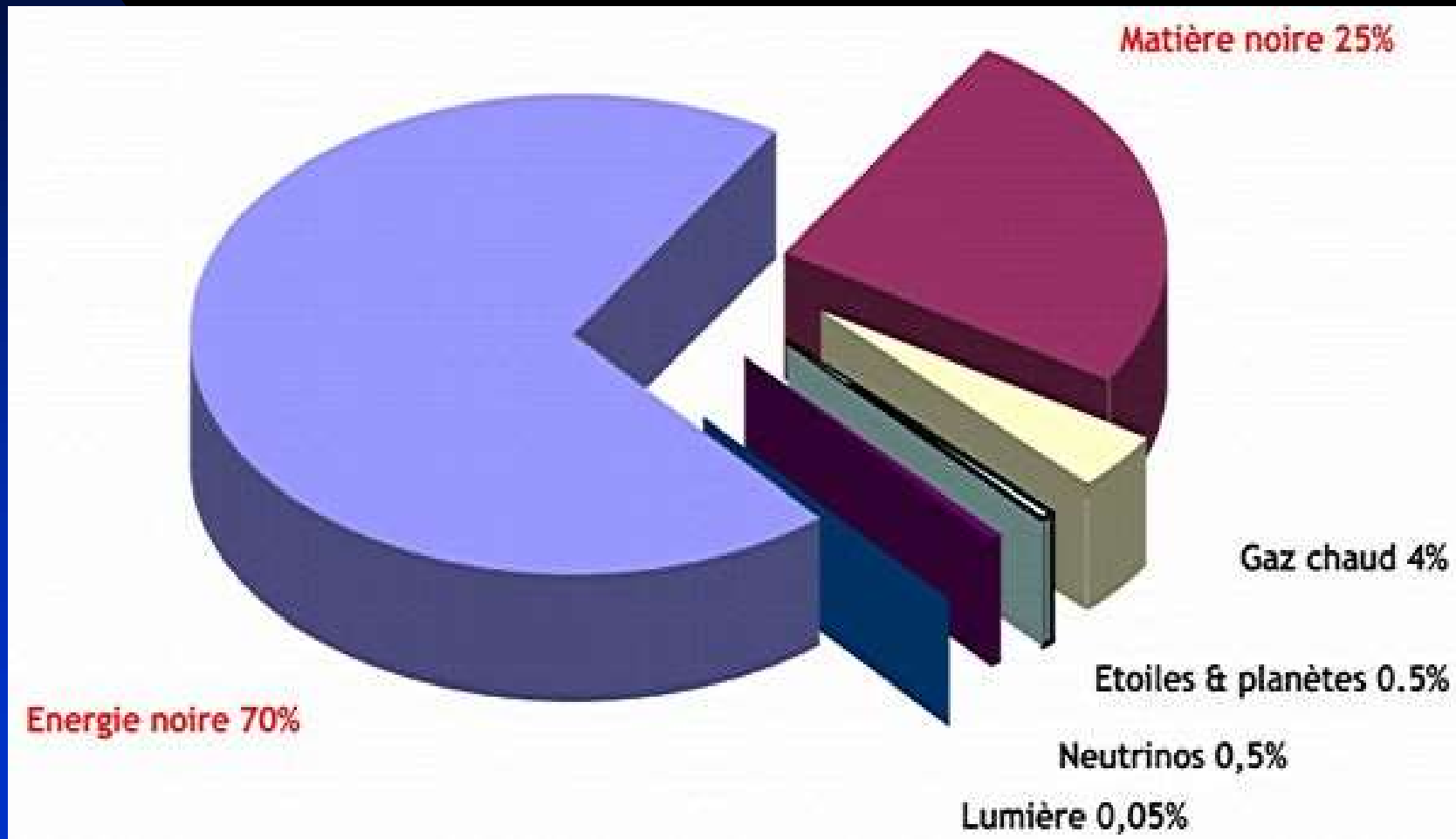
Les estimations les plus récentes font état de plusieurs centaines milliards de planètes rien que dans notre galaxie, dont plusieurs milliards susceptibles de reproduire les conditions propices à l'apparition de la vie.

ET POURTANT

6

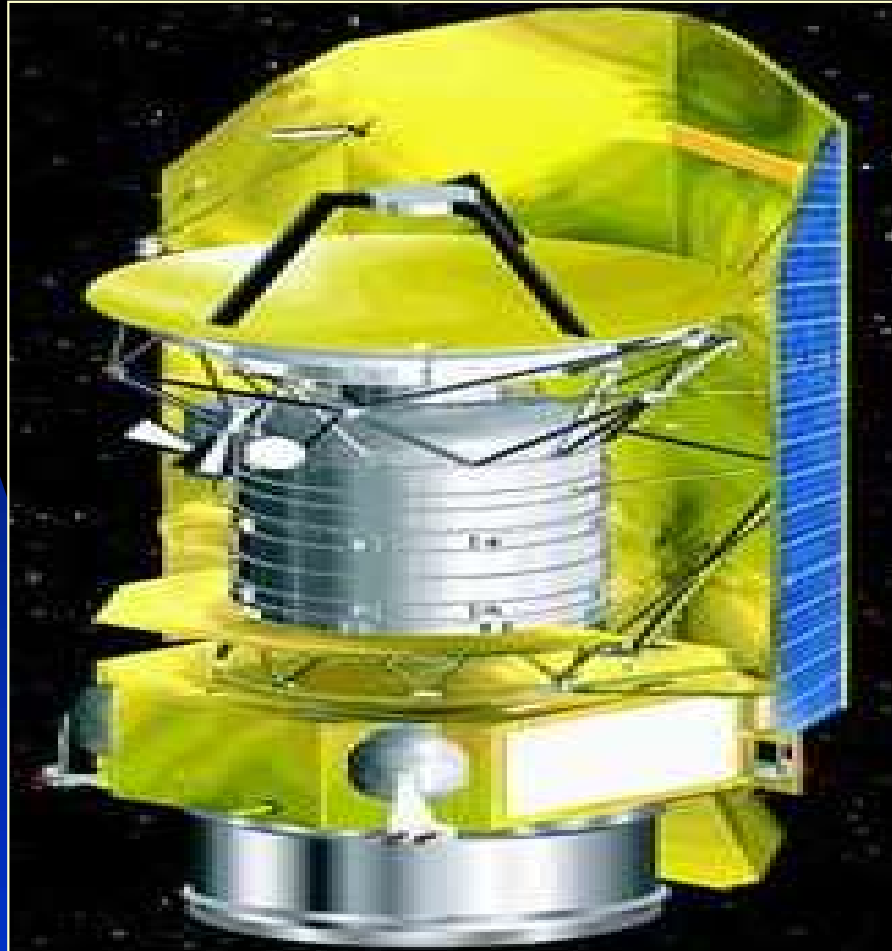
Seulement moins de 5% DE MATIERE EST DETECTABLE

5% de matière détectable, dont la matière solide ne représente que le dixième. Quantitativement, les proportions sont les suivantes: ::



Le Télescope spatial **HERSCHEL**

Opérationnel entre 2009 et 2013, Herschel est un télescope spatial infrarouge développé par l'Agence Spatiale Européenne



7

Le Very Large Telescope VLT

8

De l'ESO

(l'European Southern Observatory au Chili)

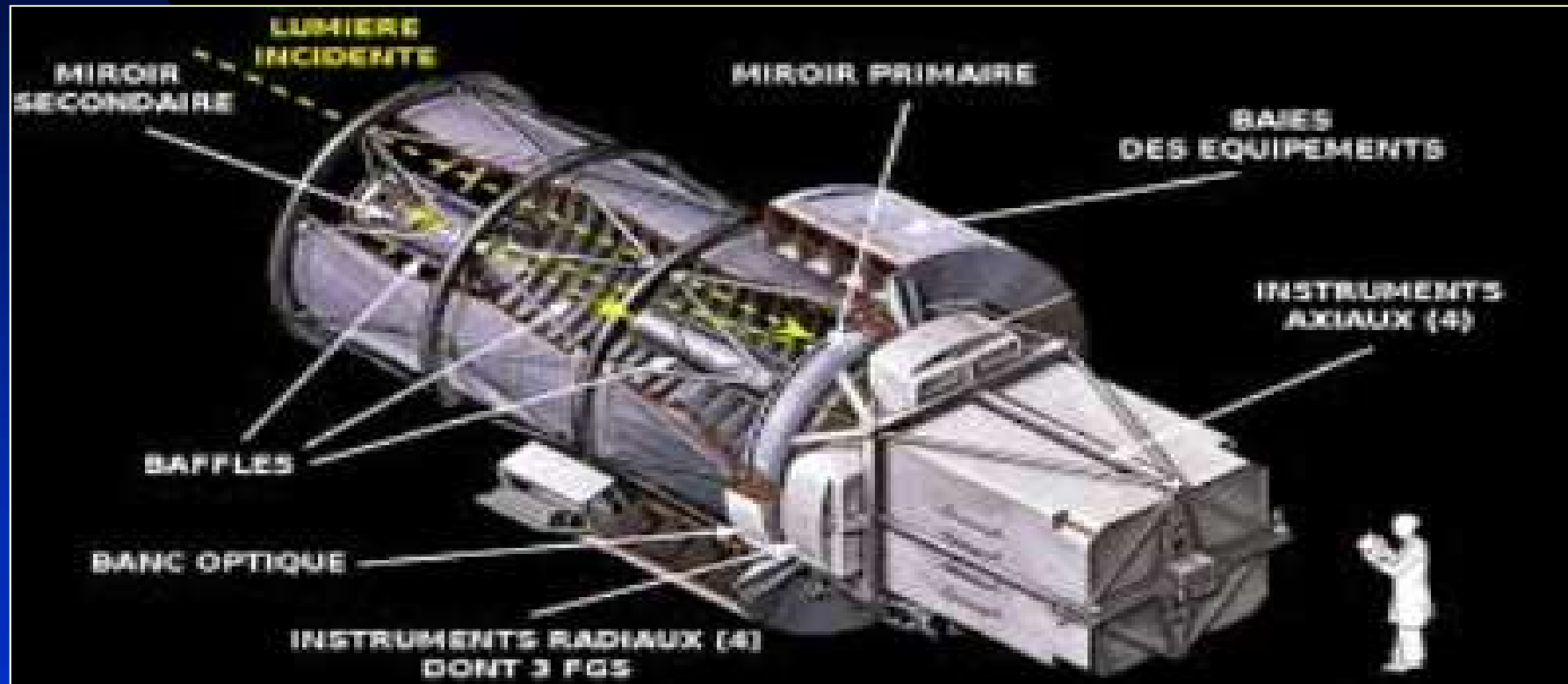
Un interféromètre géant avec son spectrographe VIMOS



Le télescope spatial **HUBBLE**

9

(télescope spatial de la NASA avec l'Agence Spatiale Européenne)
opérationnel depuis 1990 .



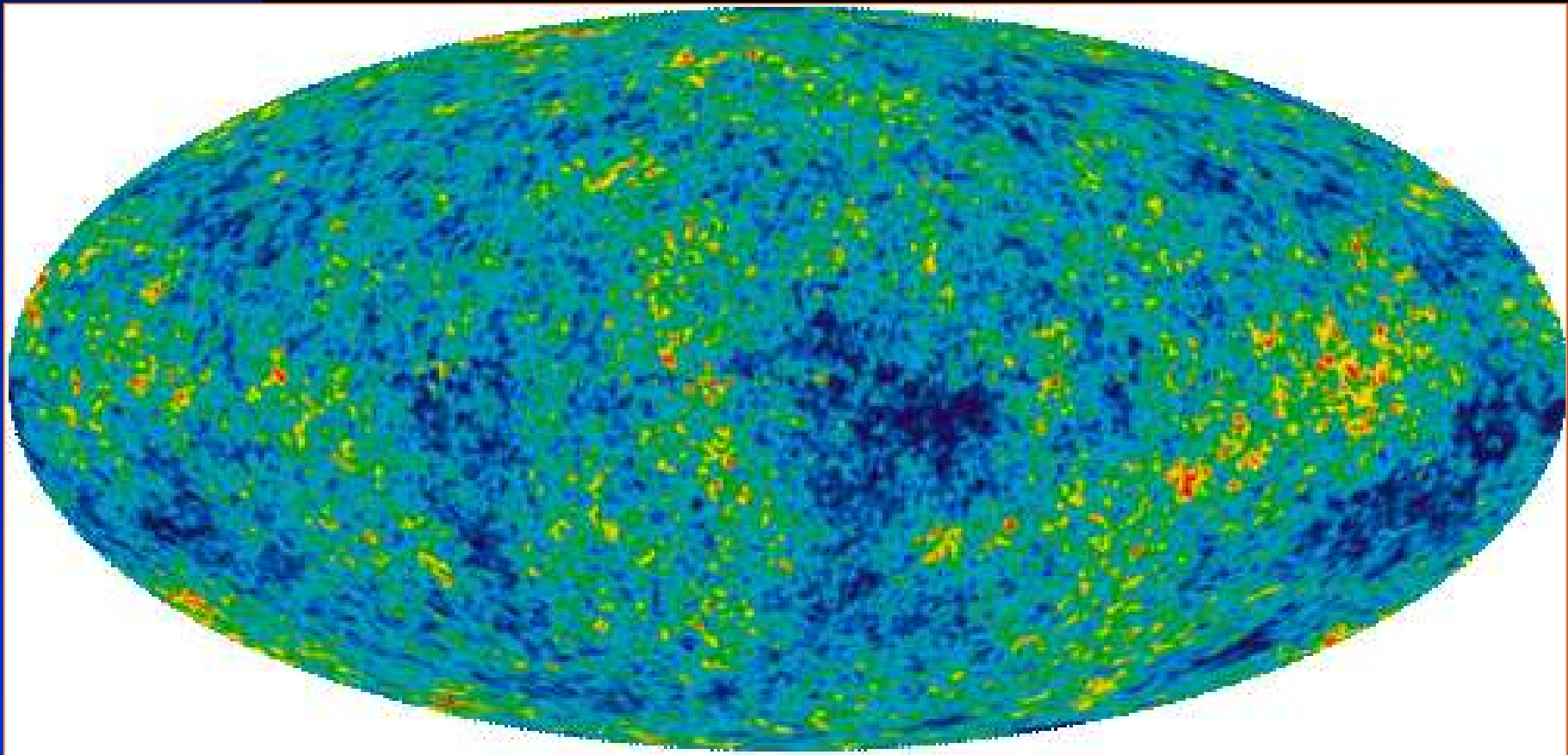
Cet instrument est l'auteur de la célèbre « plus vieille photo du monde »

L'observatoire spatial **PLANCK**

L'image réalisée par Planck en 2013 est considérée en cosmologie comme une véritable révolution.

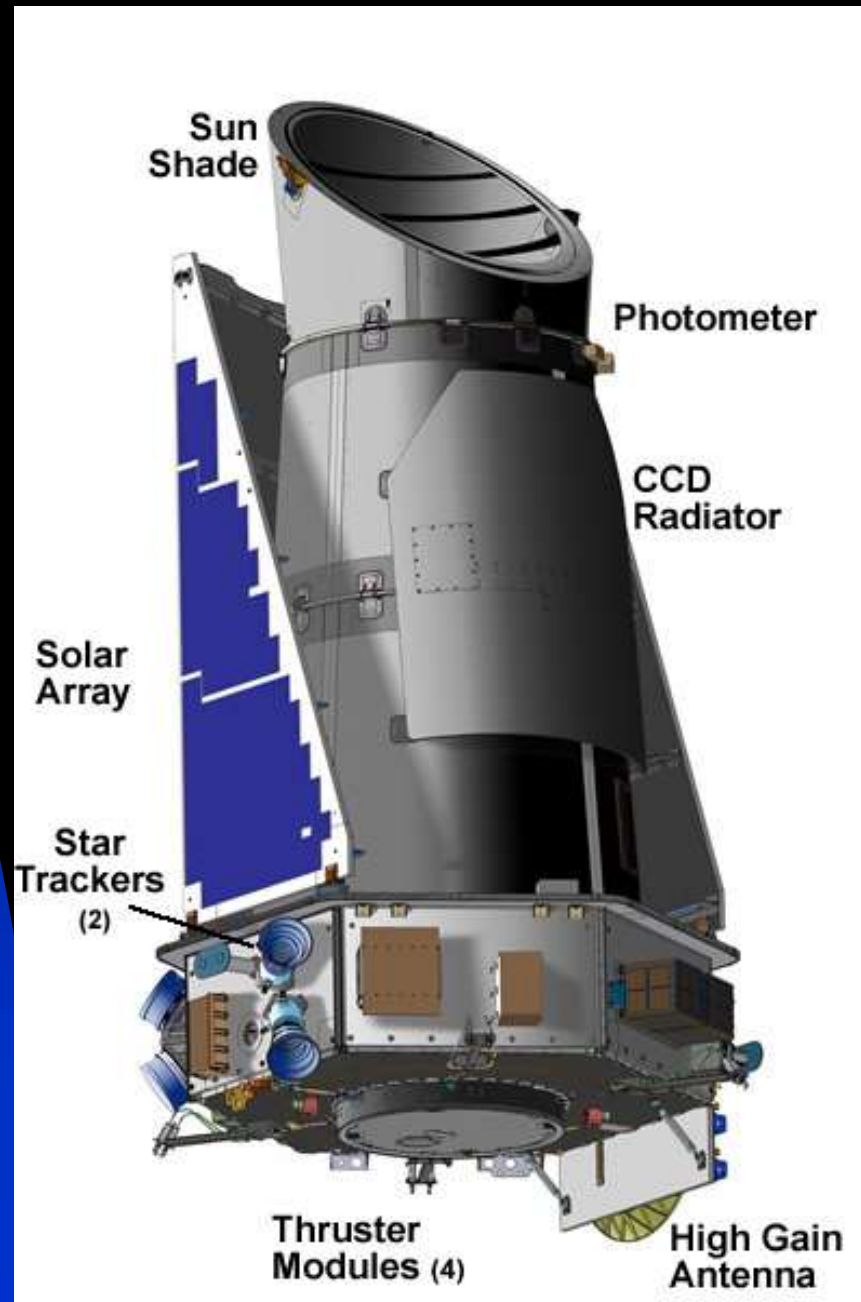


Ces petites irrégularités que l'on observe sur cette image du fond diffus cosmologique appelé aussi rayonnement fossile, sont pour les astrophysiciens et les cosmologistes, une véritable mine d'informations.

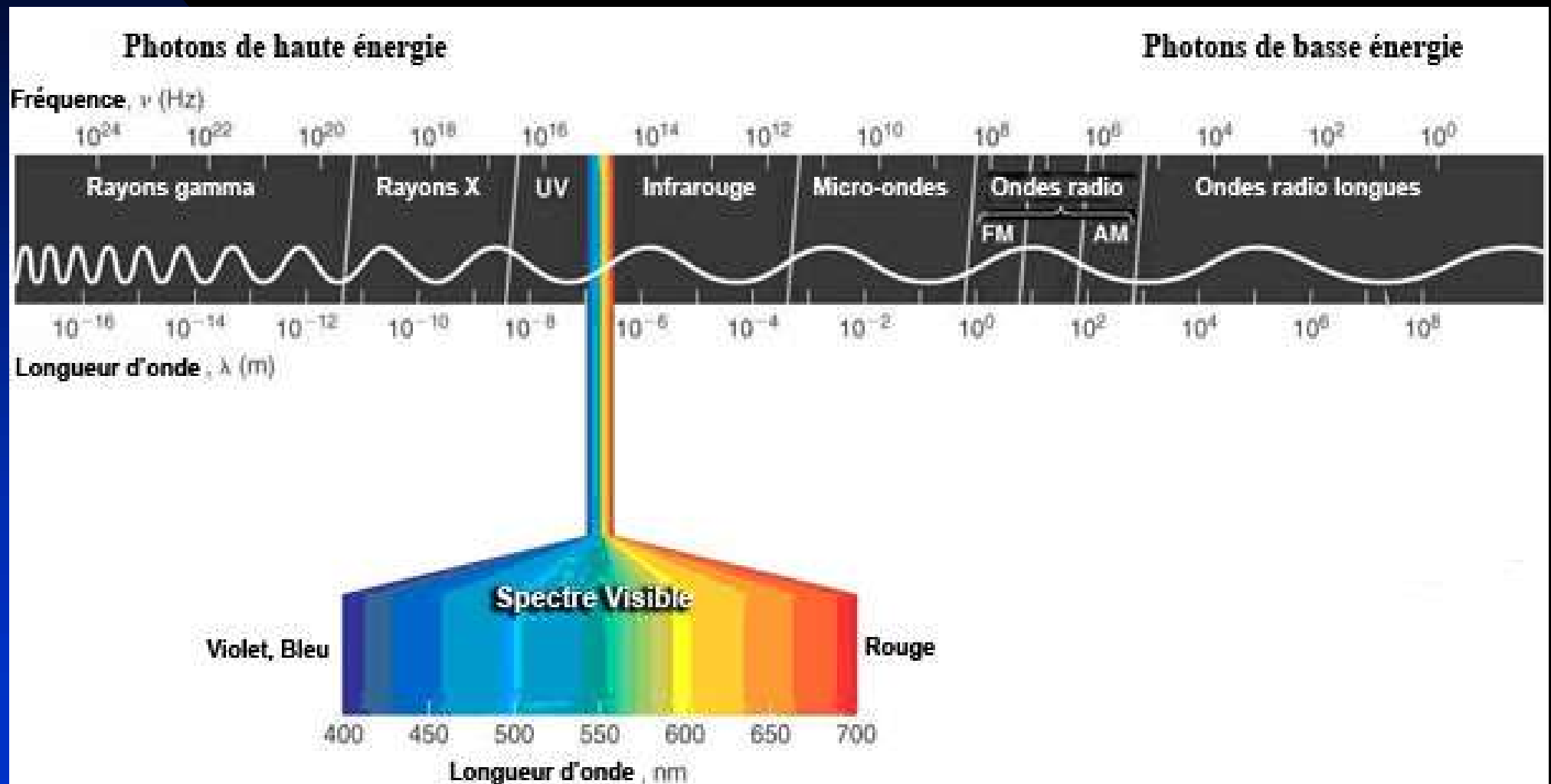


La sonde spatiale KEPLER Lancée par la NASA en 2009

12



Que « voient » ces instruments (Spectromètres ou interféromètres)



2 . La machine à remonter le temps

L'année-lumière

14

Vitesse de la lumière dans le vide: 299 792 458 m/s
soit 1 079 852 849 km/h

Une année en heure = $365,25 \times 24 = 8766$ heures

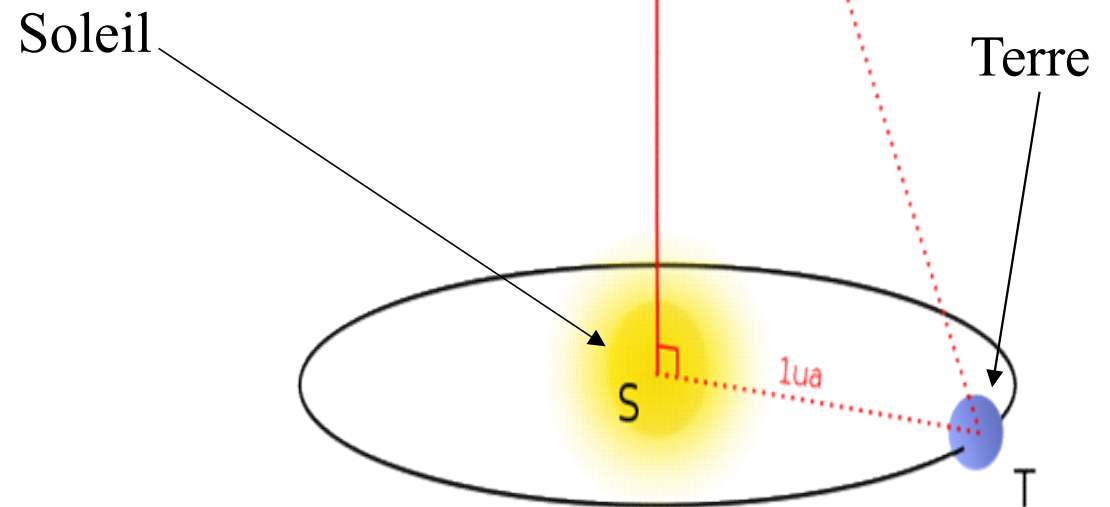
En multipliant une vitesse par un temps on a bien une distance,
donc:

$8766 \text{ heures} \times 1\,079\,852\,849 \text{ km/h} =$
9.461 milliards de km

Définition de l'UA (unité astronomique) et du Parsec (parallaxe par seconde)

15

UA = 149 597 871 km
PARSEC = $31,35 \cdot 10^{12}$ km



Compte tenu que l'angle au sommet fait 1 seconde d'arc soit $1/3600^\circ$ de degré. Il est clair que le dessin est loin d'être à l'échelle

Notre œil, la machine à remonter le temps

16

Nous les voyons tels qu'ils étaient:

Le Mont Blanc vu de Lyon : il y a 0,43 millisecondes

La Lune: il y a 1,28 secondes

Le Soleil: il y a 8,33 minutes

Proxima du Centaure : il y a 4,22 ans

Bêta du Centaure : il y a 600 ans

Deneb dans la constellation du Cygne : il y a 1600 ans



La photo du presque-début de l'Univers

17

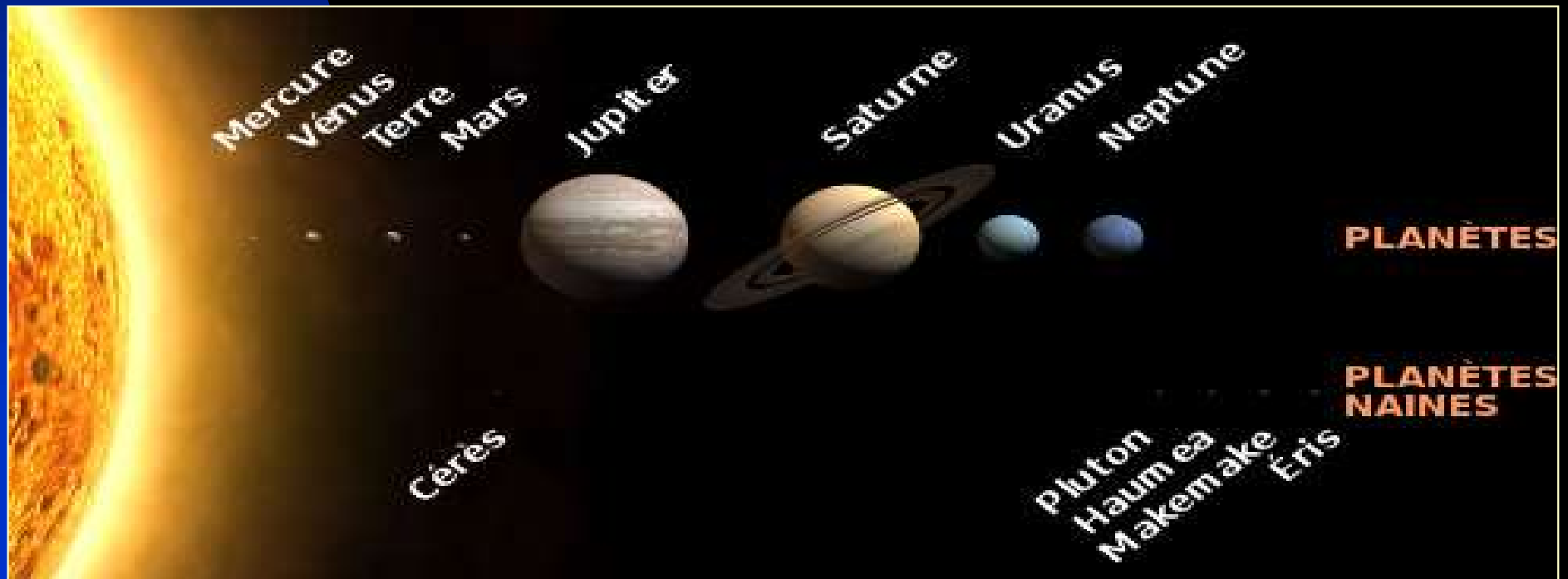
La plus vieille photo du monde, prise en 2012 par Hubble, nous fait remonter le temps à 13.2 milliards d'années.



3. La trahison du bon sens

18

Cette image présente l'intérêt d'être à peu près à l'échelle , repérez la Terre et comparez-la au Soleil. Une image comme celle-là devrait amener ceux qui nomment des « miss univers » à relativiser un peu plus. Remarquez au passage que Pluton ne fait plus partie des planètes



4. L'illusion de l'immobilité

Bien calé dans notre fauteuil, nous nous considérons comme parfaitement immobile...

De quelle immobilité s'agit-il ?

Qu'on le veuille ou non, nous sommes entraînés par la rotation de la Terre à 1.675 km/h; avec notre satellite, la lune, autour du Soleil à 108.000Km/h

Et le système solaire complet, autour de la voie lactée à
900.000 Km/h

Voilà une bien étrange immobilité

Si l'Univers avait un an... Le calendrier cosmique

20

Selon la théorie du Big Bang, notre Univers a environ quinze milliards d'années.
Une échelle de temps difficile à appréhender sauf si l'on imagine que l'Univers n'a qu'un an...

1^{er} janvier
à 0 h 00'



Big Bang

1^{er} avril



formation de
la Voie Lactée

9 septembre



naissance du
système solaire

29 septembre



premières
cellules vivantes

19 décembre



apparition
des plantes

20 décembre



apparition
des poissons

21 décembre



apparition
des insectes

23 décembre



apparition
des reptiles

24 décembre



apparition
des dinosaures

26 décembre



apparition
des mammifères

27 décembre



apparition
des oiseaux

28 décembre



extinction
des dinosaures

Quant à l'Homme, toute son histoire se déroulerait dans la seule soirée du 31 décembre :

22 h 30'



premiers
hommes

23 h 59'



Lascaux

23 h 59' 50"



début de
la civilisation
égyptienne

23 h 59' 55"



naissance
du Bouddha

23 h 59' 56"



naissance
du Christ

23 h 59' 59"



découverte
de l'Amérique

Minuit

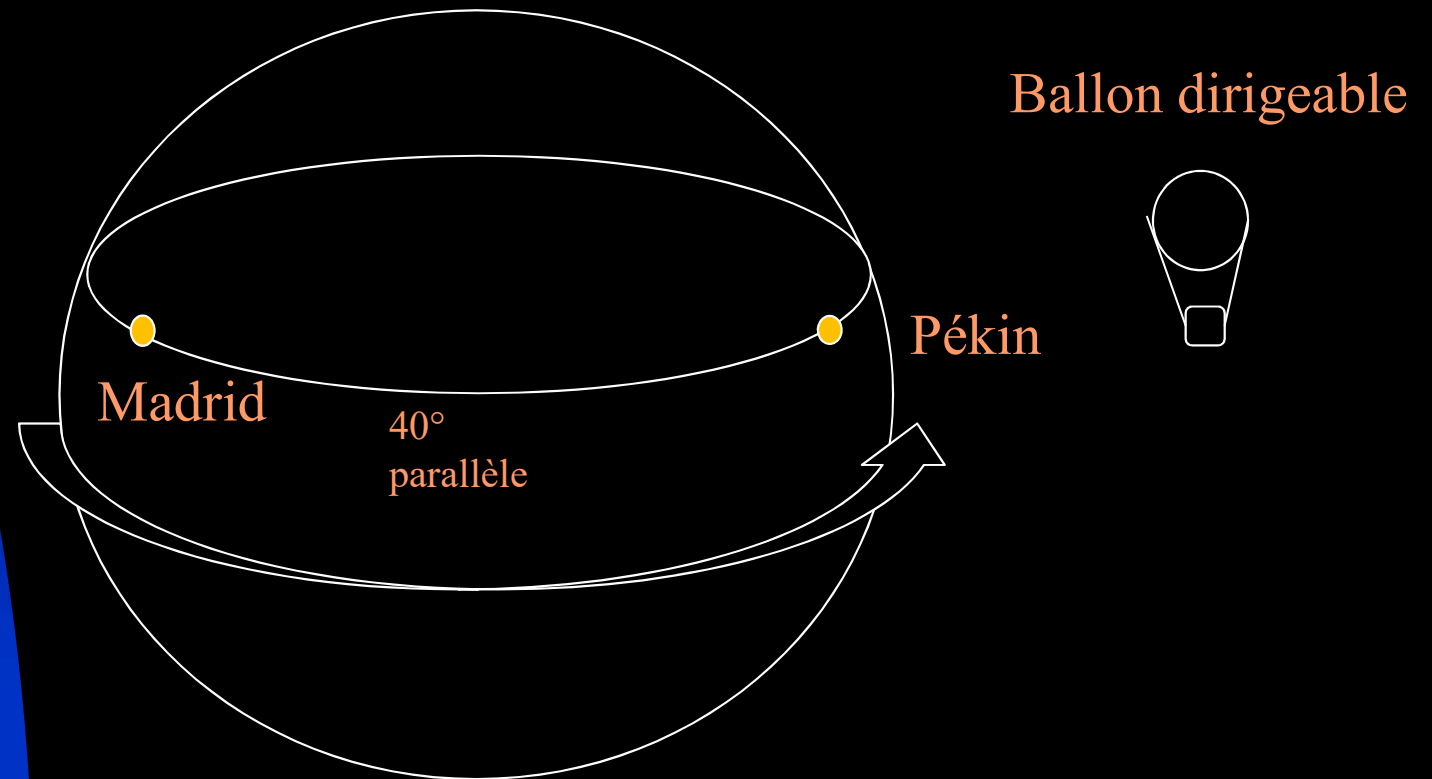


début
du XXI^e siècle

6. La relativité galiléenne

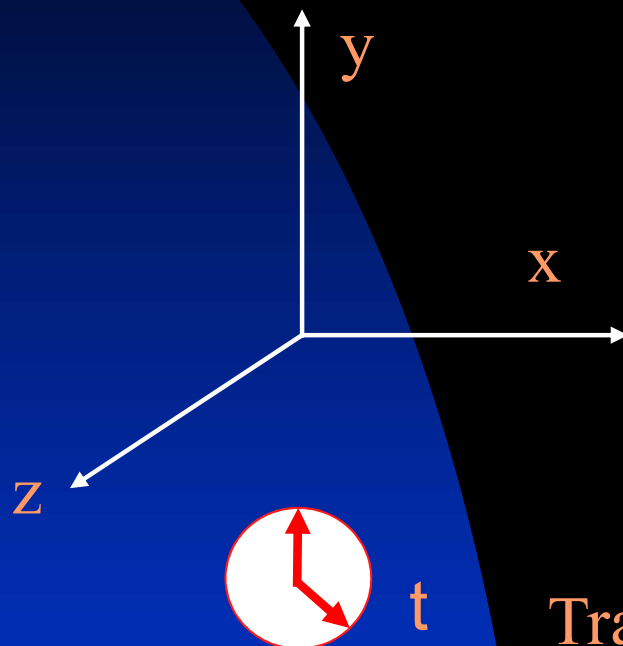
21

Expérience de pensée du vol Pékin -Madrid



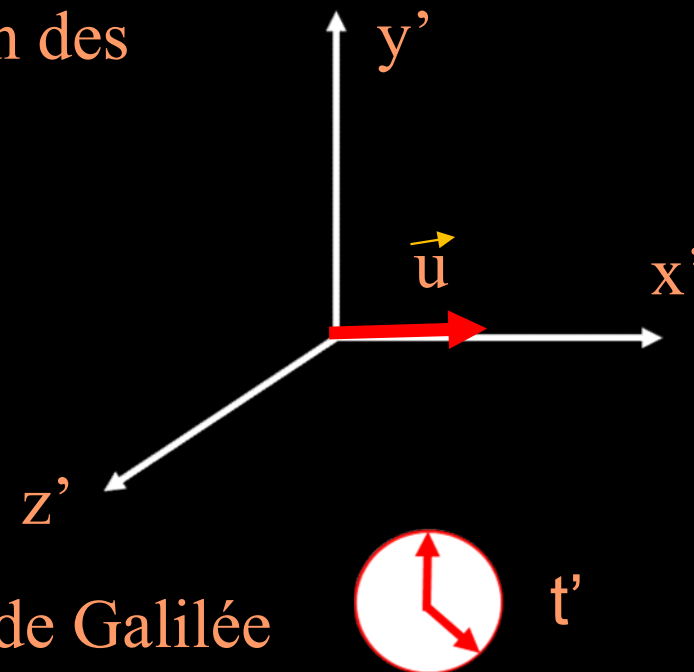
Transformation de Galilée

Référentiel R



Loi de
composition des
vitesses:
 $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$

Référentiel R'



Transformation de Galilée

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - ut \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

De Galilée à Lorentz

Pour régler le problème de l'histoire du passager dans l'avion, Lorentz modifie les transformations de Galilée de sorte que la vitesse de la lumière demeure constante. Ainsi la composition des vitesses devient:

$$V = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}$$

Forme académique des transformations de Lorentz:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Delta y' = \Delta y \quad \Delta z' = \Delta z$$

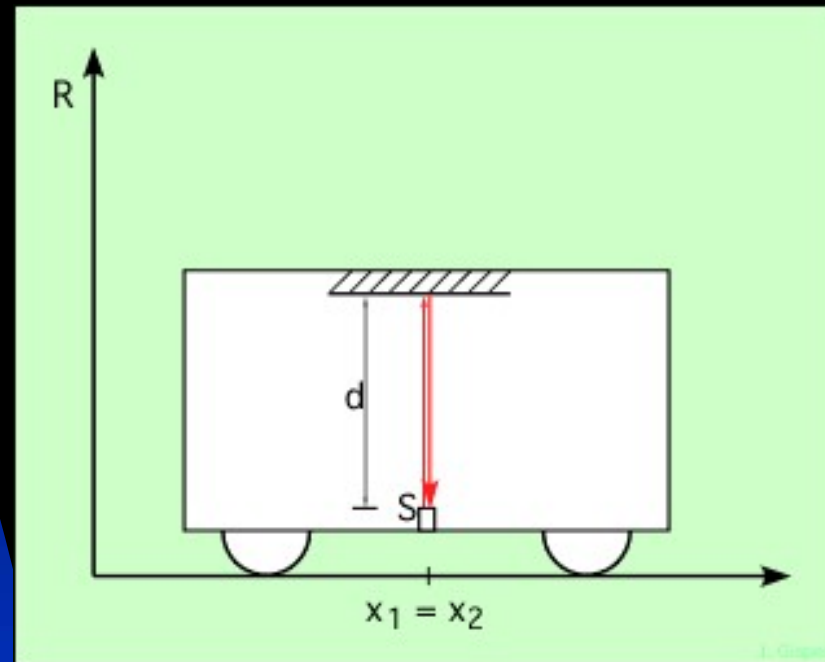
La flexibilité du temps et de l'espace

24

L'automobile de Poincaré

(cette expérience de pensée est aussi appelée: horloge à lumière)

Référentiel
(galiléen) R
véhicule à l'arrêt

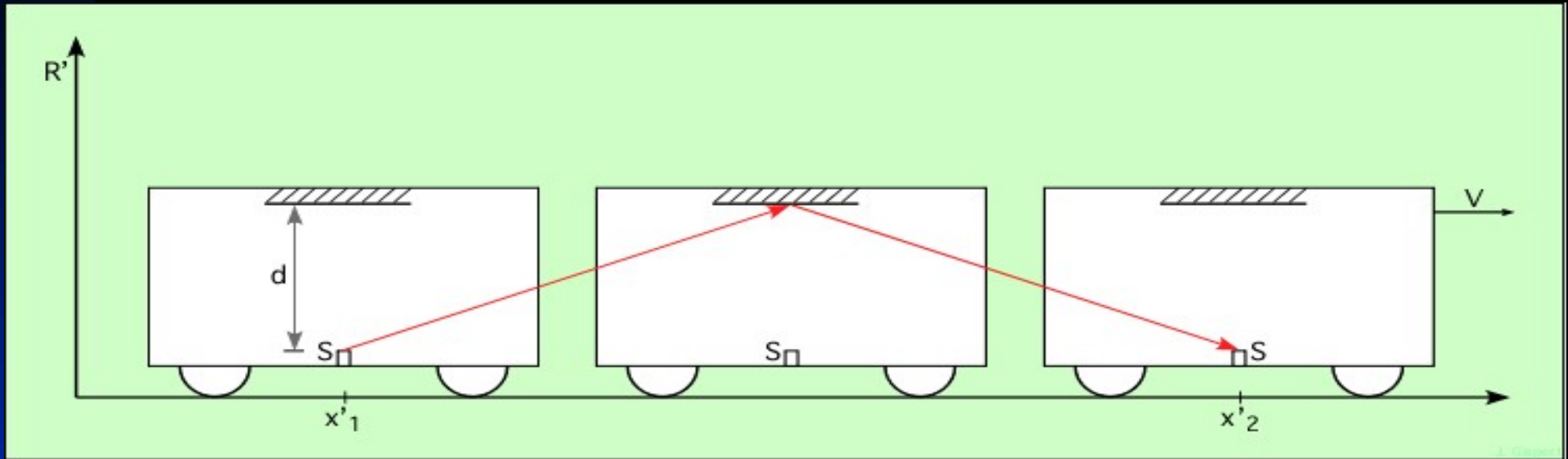


$$2T = 2d/c$$

Soit une source lumineuse S et un miroir, ce dernier en face de la lampe. dans une voiture à l'arrêt. Un rayon lumineux issu de la lampe va se réfléchir sur le miroir, et revenir à la lampe. Si T est le temps que met la lumière pour aller de la source au miroir, d est la distance entre la lampe et le miroir, le rayon lumineux (en rouge) a parcouru la distance 2 d, à la vitesse de la lumière, donc dans le temps $2T = 2d/c$.

L'automobile de Poincaré

Référentiel (galiléen avec vitesse rectiligne uniforme) R' Véhicule en mouvement



Vu du bord de la route la voiture est en mouvement à la vitesse v , le signal lumineux est émis lorsque la voiture est en x'_1 , et reçu par la lampe, après réflexion sur le miroir, lorsque la voiture est en x'_2 . Lorsque le signal atteint le miroir, la voiture est au milieu de ce parcours. Le trajet du signal (en rouge), vu de la route, est donc plus long que vu de la voiture. Or il est parcouru à la même vitesse c , puisque la lumière se déplace à cette vitesse-là dans tous les référentiels. Donc, puisque le trajet est plus long, et parcouru à la même vitesse, le temps de parcours **doit** être plus long. Le temps mesuré depuis le bord de la route est par conséquent supérieur au temps propre, mesuré dans la voiture.

Simplifions le système par le schéma ci-contre. $c^2.T^2 = v^2.T^2 + d^2$ ie: $c^2T^2 = v^2.T^2 + 1^2$
On tire la valeur de T en prenant la racine de
 $T^2 = 1 / (c^2 - v^2)$

Donc pour le bord de la route:

$$2T = 2 / \sqrt{c^2 - v^2}$$

Rappel: dans la voiture: $2T = 2d/c$

Le rapport de ces 2 périodes est une mesure du ralentissement du temps. Pour l'observateur immobile sur la route, le temps est ralenti d'un facteur :

$$c / \sqrt{c^2 - v^2}$$

et en divisant numérateur et dénominateur par c , on obtient le fameux facteur de dilatation du temps et de contraction de l'espace:

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

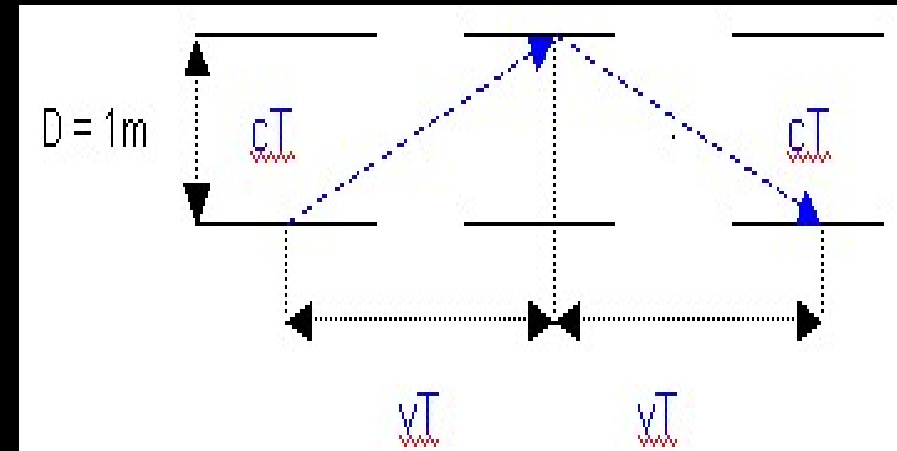


Tableau des valeurs de $\gamma(v)$ selon la vitesse

27

vitesse v	km s^{-1}	$\gamma(v)$	temps	longueur	vitesse v	km s^{-1}	$\gamma(v)$	temps	longueur
0	0	1	1 s	1 m	0,6 c	180.000	1,25	1,25 s	0,8 m
0,05 c	15.000	1,0012	1,0012 s	0,9988 m	0,7 c	210.000	1,4	1,4 s	0,714 m
0,1 c	30.000	1,005	1,005 s	0,995 m	0,8 c	240.000	1,666	1,666 s	0,600 m
0,2 c	60.000	1,02	1,02 s	0,980 m	0,9 c	270.000	2,29	2,29 s	0,436 m
0,3 c	90.000	1,048	1,048 s	0,953 m	0,95 c	285.000	3,202	3,202 s	0,312 m
0,4 c	120.000	1,091	1,091 s	0,916 m	0,99 c	297.000	7,088	7,088 s	0,141 m
0,5 c	150.000	1,155	1,155 s	0,865 m	0,999 c	299.700	22,37	22,37 s	0,045 m

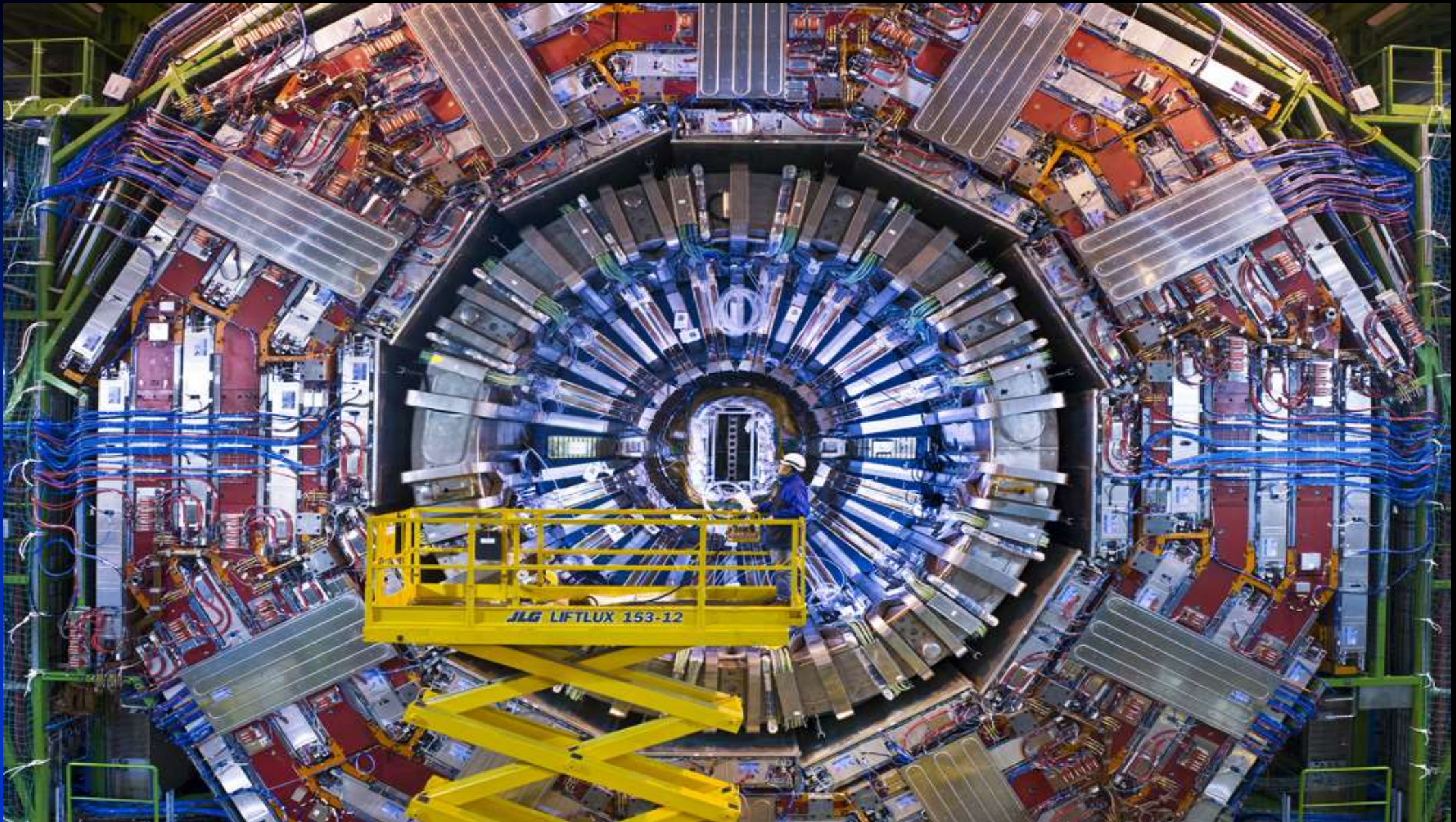
National Laboratory de Brookhaven

Photo du site à Long Island USA où sont repérés le Relativistic Heavy Ion Colider, l'Alternative Gradient Syncrotron, et l'accélérateur linéaire Linac



Le détecteur CMS du LHC de Genève

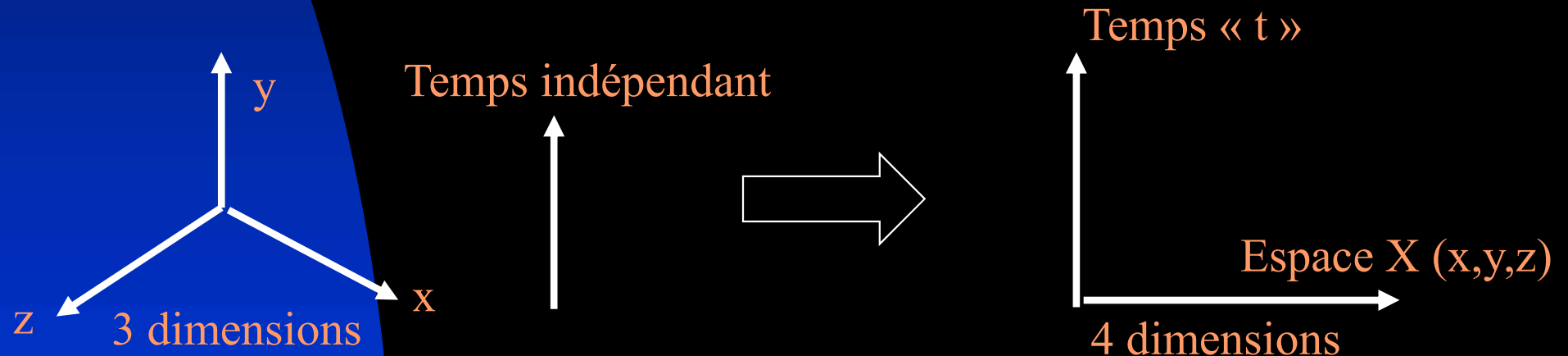
29



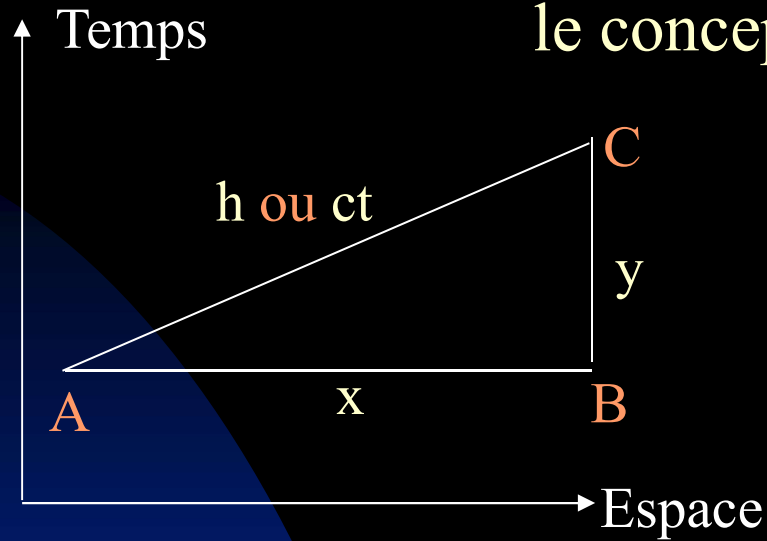
Vers le quadrivecteur espace-temps de Minkowski

Minkowski (ancien prof de maths d'Einstein) appliqua les transformations de Lorentz à un système tridimensionnel animé d'un mouvement uniforme et aboutit à un nouvel espace à quatre dimensions.

L'espace ainsi créé est appelé espace hyperbolique ou espace-temps de Minkowski



le concept de Minkowski



Dans un référentiel à deux dimensions, on peut mesurer un segment quelconque AC par le théorème de Pythagore, soit : $h^2 = x^2 + y^2$.

Ce théorème se généralise immédiatement à trois dimensions: $h^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Imaginons un photon qui se déplace de A à C, à la vitesse c , alors h peut s'écrire ct

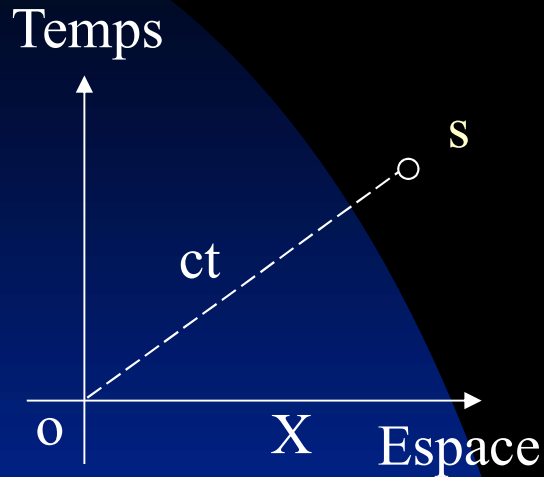
L'équation devient $c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ou $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Cette équation est fondamentale car elle représente le comportement d'un photon dans l'espace-temps (puisqu'elle le décrit en fonction des coordonnées d'espace et de temps).

Nous venons de définir un terme qu'on appelle « intervalle d'univers » que l'on note généralement « ds^2 » en notation différentielle et qui vaut 0 pour un photon.

On a donc: $ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ qui est un invariant relativiste

Cette expression définit la *Métrie de Minkowski*

Comme il n'est pas possible de représenter un quadrivecteur sur un plan, simplifions en posant: $x^2 + y^2 + z^2 = X^2$ (l'espace) . On obtient $s^2 = c^2t^2 - X^2$ que l'on peut représenter par le schéma ci-dessous:



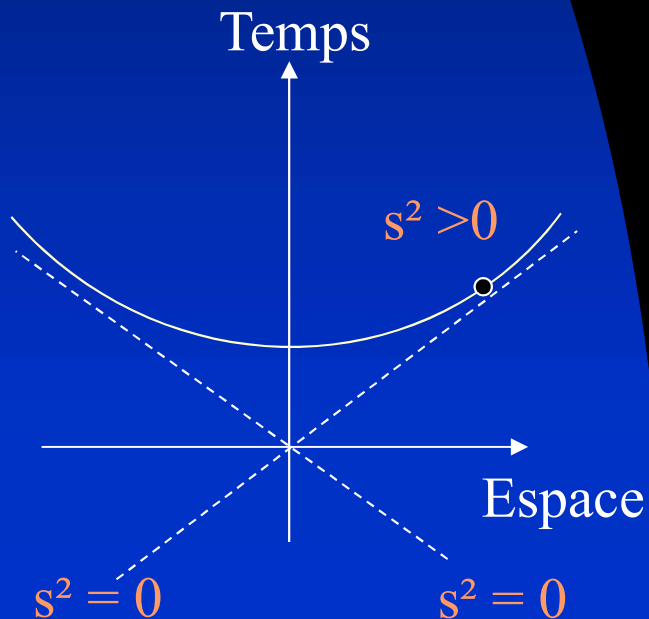
Sauf que l'on vient de transformer le théorème de Pythagore avec un $-$ au lieu d'un $+$. Ce qui fait que le lieu géométrique des points « s » n'est plus un cercle mais une hyperbole équilatère, avec deux asymptotes à 45° où $c^2t^2 = X^2$ soit $s^2 = 0$.

D'où la notion d'espace hyperbolique de Minkowski

Si c'est clair pour un photon, qu'advient-il pour un mobile à faible vitesse ?

Pendant le temps t , la lumière parcourt toujours la longueur ct , mais le mobile parcourt une longueur bien moindre, X^2 . Par conséquent, $c^2t^2 > X^2 \Rightarrow s^2 = c^2t^2 - X^2 > 0$.

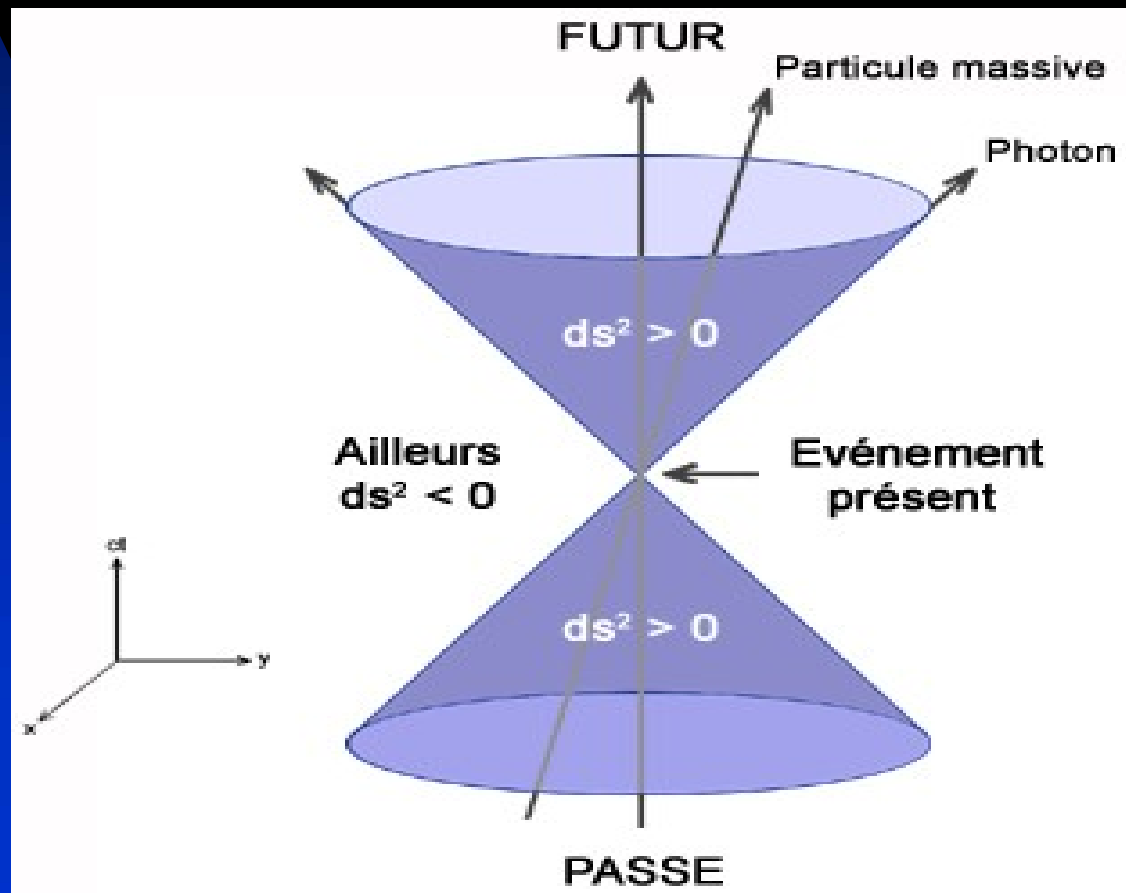
Comme Aucun signal ne peut se déplacer plus vite que la lumière. Donc, l'intervalle d'univers d'un mobile ne peut être que positif et à l'intérieur d'une sorte de cône.



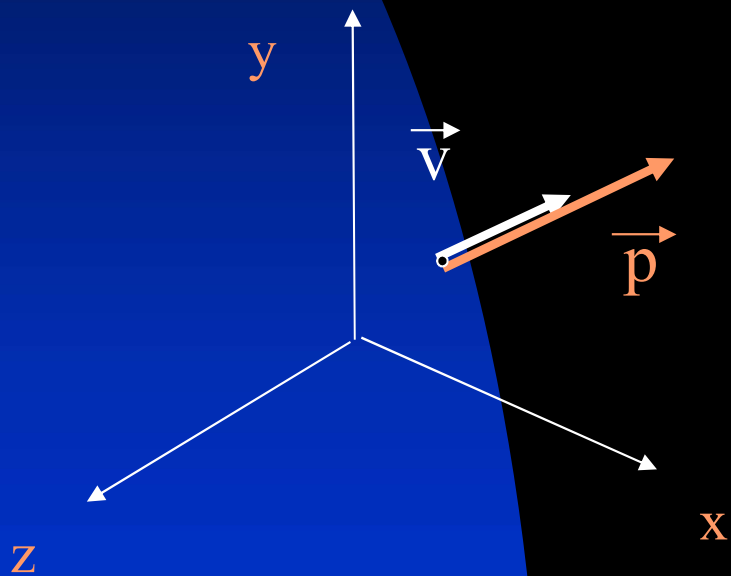
On appelle « cône de lumière » une représentation généralisée du principe précédent qui montre que les liens de causalité sont conditionnés par la vitesse de la lumière.

Pour $s^2 < 0$ ($c^2t^2 < X^2$), il n'y a pas de lien de causalité possible.

(Les flèches représentent ce que l'on appelle des « lignes d'univers »)



Le vecteur « quantité de mouvement » dans un espace à 3 dimensions



Vecteur quantité de
mouvement

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Direction identique à v

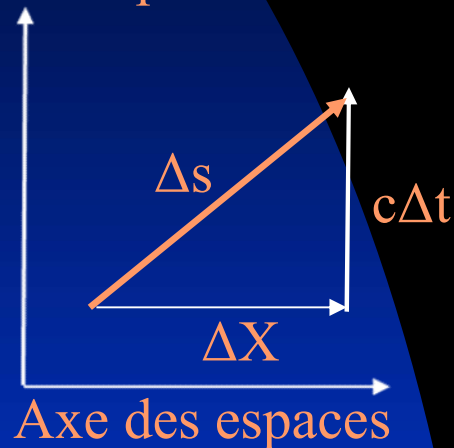
Sens: celui de v

Norme: $\|\vec{p}\| = m \|\vec{v}\|$

Le quadrivecteur « quantité de mouvement » dans l'espace-temps

Axe des temps

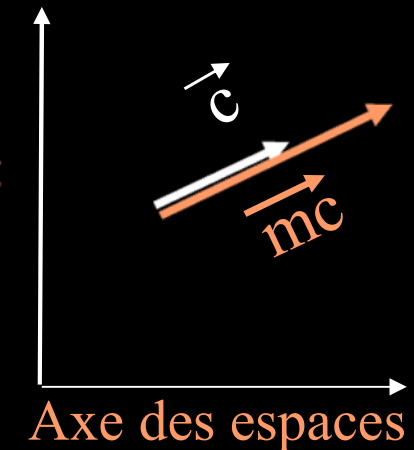
$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta X^2$$



Axe des temps

Vecteur vitesse:

$$\frac{\Delta s}{\Delta s/c} = c$$



$\vec{mc}$ = quadrivecteur quantité de mouvement

Note: $\Delta s/c$ remplace Δt qui n'est pas un invariant pour le calcul du vecteur vitesse

Détermination des composantes du quadrivecteur

Composantes du quadrivecteur
vitesse u_i ($i=0-3$)

$$u_0 = c = \gamma \cdot c$$

$$u_1 = vx = \gamma \cdot vx$$

$$u_2 = vy = \gamma \cdot vy$$

$$u_3 = vz = \gamma \cdot vz$$

Composantes du quadrivecteur quantité
de mouvement $p_i = m u_i$ ($i=0-3$)

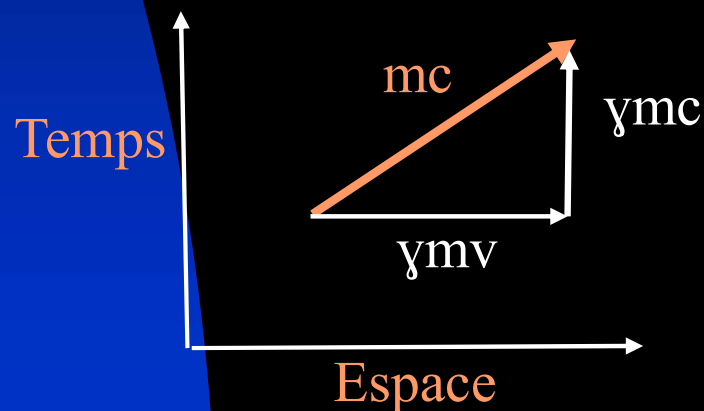
$$p_0 = m \cdot \gamma c \text{ ou } \gamma mc$$

$$p_1 = m \cdot \gamma vx$$

$$p_2 = m \cdot \gamma vy$$

$$p_3 = m \cdot \gamma vz$$

$$\left. \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \right\} \gamma \cdot mv$$



$$P^2 = (\gamma mc)^2 - (\gamma mv)^2 = \gamma^2 m^2 \cdot (c^2 - v^2) = \gamma^2 m^2 \cdot c^2 / \gamma^2 = m^2 c^2, \text{ soit } p = mc$$

De $\frac{1}{2} mv^2$ à mc^2 (De Newton/Leibniz à Einstein)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{Peut s'écrire } 1 + \frac{1}{2} \cdot (v^2/c^2) + \frac{3}{8} \cdot (v^4/c^4) + \dots$$

Pour les vitesses bien inférieures à c on a donc une approximation de $\gamma = 1 + \frac{1}{2} v^2/c^2$. Par exemple pour 10% de c , soit environ 30.000 km/s, on a $\gamma = 1.00504$ et $(1 + \frac{1}{2} v^2/c^2) = 1.00500$. et on pourra écrire que $\gamma mc^2 = (1 + \frac{1}{2} v^2/c^2) \cdot mc^2 = \underline{mc^2 + \frac{1}{2} mv^2}$. Ainsi, nous avons montré une nouvelle forme de l'énergie γmc^2 qui est la somme de mc^2 et de $\frac{1}{2} mv^2$.

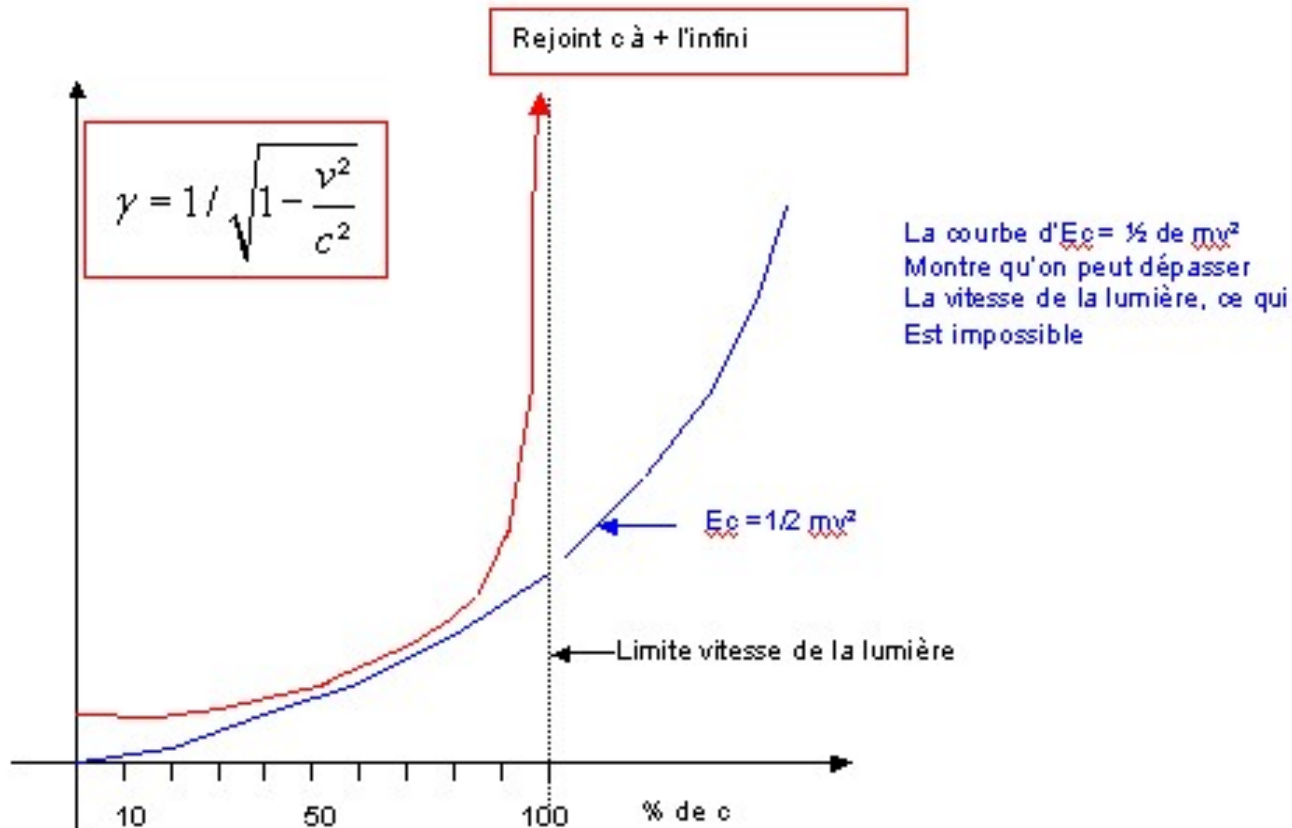
En résumé l'énergie d'une particule en mouvement

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si la vitesse est nulle, c'est-à-dire dans le référentiel de la particule, le rapport v^2/c^2 est nul, le dénominateur vaut 1, et il ne reste que :

$$E = mc^2$$

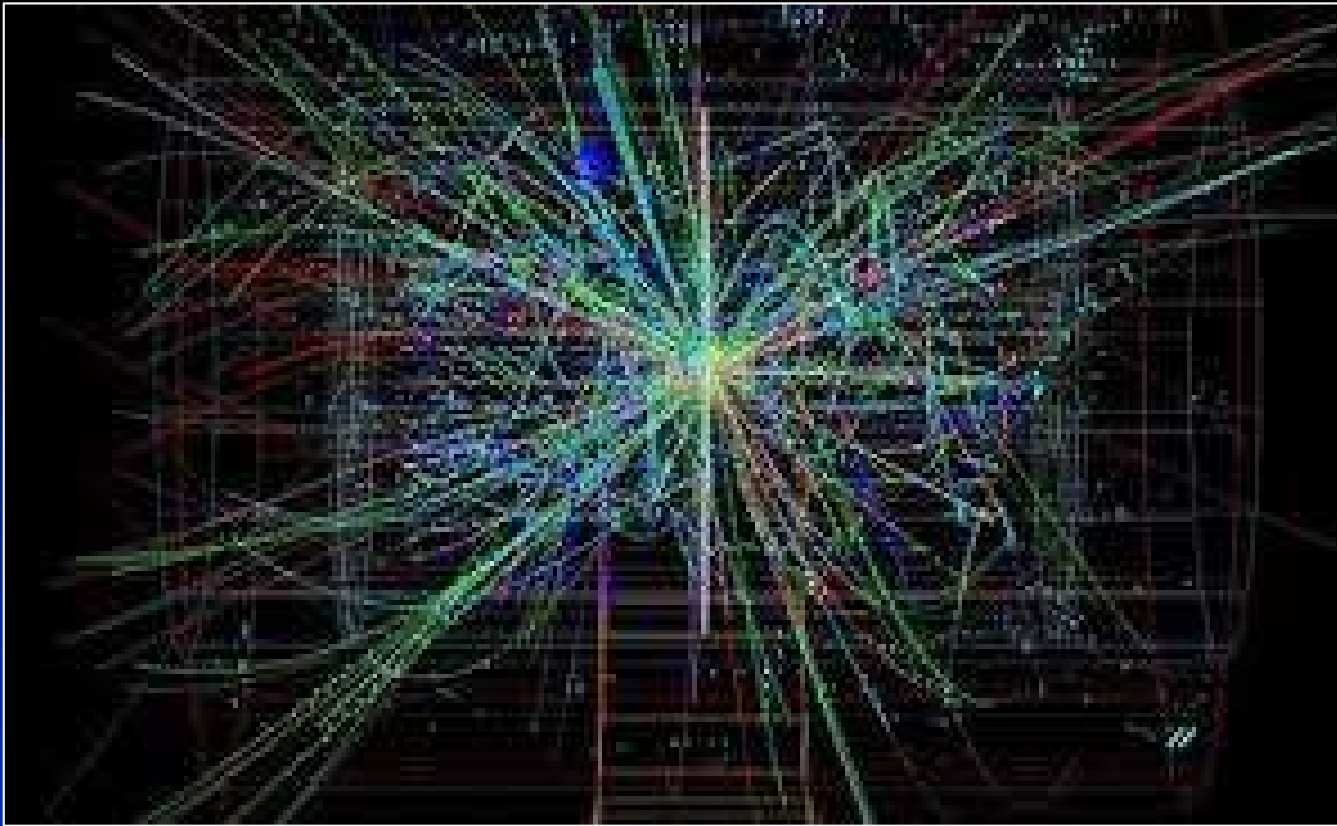
Courbes comparatives de γmc^2 et $\frac{1}{2} mv^2$



La courbe de $E = \gamma mc^2$
 $= mc^2 / (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$
 tend de la même façon
 vers l'infini quand v
 tend vers c

Si v tend vers c , γ tend vers l'infini. Cela veut dire qu'il faudrait une énergie de propulsion E tendant vers l'infini pour propulser un vaisseau voulant atteindre cette vitesse.

Lorsque la conséquence n'est plus du tout négligeable



Collision de protons au LHC de Genève

Pourquoi $E=MC^2$? - Brian Cox et Jeff Forshaw

Espace, temps, matière et force - Thibault Damour

Relativité et vitesse de la lumière - Gabrielle Bonnet ENS Lyon

Espaces courbes - Conférence Université de tous les savoirs - Jean-Pierre Bourguignon

Entretien sur la multitude du monde - Thibault Damour

Cours de relativité restreinte - podcast Université de Savoie - Richard Taillet

Le destin de l'Univers - Jean-Pierre Luminet

Y a-t-il un grand architecte dans l'Univers - Stephen Hawking et Léonard Mlodinow

Brève histoire du temps - Stephen Hawking

Le cosmos et le lotus - Trinh Xuan thuan